## OPCIÓN A

**1.**.- Hallar una función polinómicas de tercer grado tal que tenga su extremo relativo en **(1 , 1)** y un punto de inflexión **(0 , 3)** ¿Es **(1 , 1)** el único extremo de la función?. Determinar los máximos y los mínimos relativos de **f [2’5 puntos]**

$$\begin{cases} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) = 6ax + 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 1 \Rightarrow a + b + c + d = 1 \\ f(0) = 3 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 3 \Rightarrow d = 3 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \\ f''(0) = 0 \Rightarrow 6a \cdot 0 + 2b = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a + 0 + c + 3 = 1 \\ 3a + 2 \cdot 0 + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = -2 \\ -3a - c = 0 \end{cases} \Rightarrow -2a = -2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 1 + c = -2 \Rightarrow c = -3$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 3 \Rightarrow$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f''(x) = 6x \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo en } x = -1 \;\; f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 3 = 5 \\ f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo en } x = 1 \;\; f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 3 = 1 \end{cases}$$

**2.-** Hallar el área de la región acotada comprendida entre las gráficas de las funciones $y=\frac{1}{x^2+4}$ , $y=\frac{x}{16}$ y el eje **OY [2'5 puntos]**

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} 0=\frac{1}{x^2+4} \Rightarrow 0\neq 1 \Rightarrow No\ tiene\ puntos\ de\ corte \\ 0=\frac{x}{16} \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow \frac{1}{x^2+4}=\frac{x}{16} \Rightarrow x\left(x^2+4\right)=16 \Rightarrow x^3+4x-16=0 \Rightarrow por\ Ruffini$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 4 & -16 \\ 2 & & 2 & 4 & 16 \\ \hline & 1 & 2 & 8 & |0 \end{array} \qquad (x-2)\left(x^2+2x+8\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x^2+2x+8=0 \Rightarrow \Delta=-30<0 \Rightarrow Sin\ solució \end{cases}$$

$$f(1) \Rightarrow \begin{cases} y(1)=\frac{1}{1^2+4}=\frac{1}{5} \\ y=\frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{5}>\frac{1}{16} \Rightarrow$$

$$A=\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\,dx-\frac{1}{16}\int_0^2 x\,dx=\int_0^2 \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^2=\frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx-\frac{1}{32}\cdot\left(2^2-0^2\right)$$

$$\frac{x}{2}=t \Rightarrow dx=2\,dt \Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow t=1 \\ x=0 \Rightarrow t=0 \end{cases}$$

$$A=\frac{2}{4}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1}\,dx-\frac{1}{32}\cdot 4=\frac{1}{2}\cdot\left[arc\ tg\ t\right]_0^1-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\cdot\left(arc\ tg\ 1-arc\ tg\ 0\right)-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8}=\frac{\pi-1}{8}u^2$$

**3.-** Conocido $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$, calcula el valor del siguiente determinante $\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ **[2'5 puntos]**

$$\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix} 5a & 5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-1)\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-5)\cdot\frac{1}{5}\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-1)\cdot 1=-1$$

**4.-** Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + y - 2 = 0$

a) Determinar su posición relativa **[1 punto]**
b) En caso de cortarse, determinar el ángulo que forman y el punto de corte **[1'5 puntos]**

a) Una recta y un plano o se cortan en un punto **P** o son paralelos, en este último caso los vectores directores de ambos son perpendiculares y su producto escalar es nulo, de serlo habría que estudiar si tienen un punto común porque de tenerlo la recta estará contenida en el plano; de no serlo se cortaran en un punto **P** que hallaremos verificando los puntos de la recta en la ecuación del plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = z + 1 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = (0, 1, 1) \cdot (1, 1, 0) = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

*No son paralelos, se cortan en un punto P*

*b)*

$$-1 + 1 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow P \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + 2 = 3 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow P(-1, 2, 3)$$

Como el vector director del plano es perpendicular a él se hallara el seno del ángulo que forman plano y recta que es igual al cociente entre el producto escalar de los vectores directores del plano y de la recta y el producto de los módulos de ambos

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = (0, 1, 1) \cdot (1, 1, 0) = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$sen\ \alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_\pi}\right|} = \frac{|1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = arc\ sen\left(\frac{1}{2}\right) = 30^o = \frac{\pi}{6}\ rad$$

## OPCIÓN B

**1.**.-Dada la función **f(x) = x$^2$ – 2x + 2**

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de **f** en el punto de abcisa **x = 3**

**[1’5 puntos]**

b) Calcula el área del recinto acotado limitado por la gráfica de **f**, la recta tangente obtenida en el apartado a) y el eje **OY** **[1 punto]**

*a )*

$$f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow \begin{cases} f(3) = 3^2 - 2\cdot 3 + 2 = 9 - 6 + 2 = 5 \\ m = f'(3) = 2\cdot 3 - 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow y - 5 = 4\cdot(x-3) \Rightarrow y = 4x - 7$$

$$4x - y - 7 = 0$$

*b )*

$$\text{Puntos de corte con } OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = -4 < 0 \Rightarrow \text{Sin solución} \\ 0 = 4x - 7 \Rightarrow 4x = 7 \Rightarrow x = \dfrac{7}{4} \end{cases}$$

$$\text{Punto de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 4x - 7 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 9 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

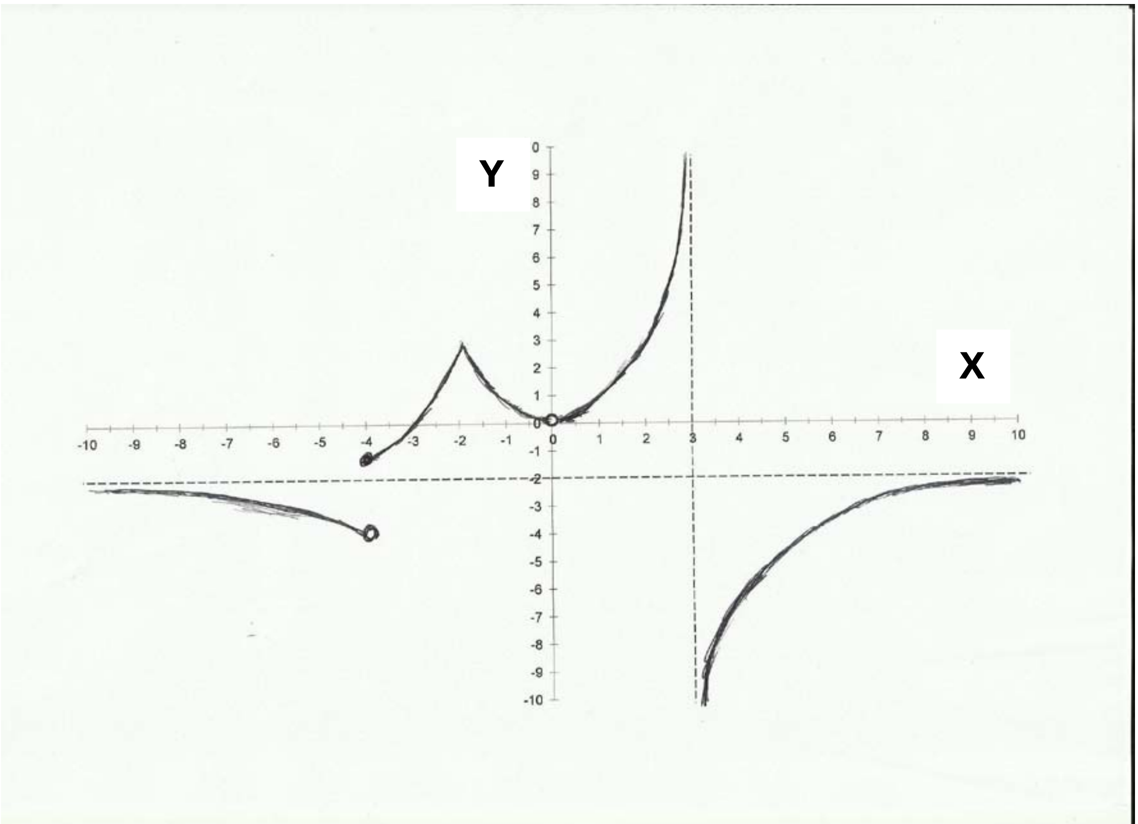
$$A = \int_0^3 \left(x^2 - 2x + 2\right) dx - \int_{\frac{7}{4}}^3 (4x - 7)\, dx = \frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^3 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^3 + 2\cdot[x]_0^3 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{\frac{7}{4}}^3 + 7\cdot[x]_{\frac{7}{4}}^3$$

$$A = \frac{1}{3}\cdot\left(3^3 - 0^3\right) - \left(3^2 - 0^2\right) + 2\cdot(3 - 0) - 2\cdot\left[3^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2\right] + 7\cdot\left(3 - \frac{7}{4}\right)$$

$$A = \frac{27}{3} - 9 + 6 - 2\cdot\left(9 - \frac{49}{16}\right) + 7\cdot\left(\frac{12-7}{4}\right) = 9 - 3 - 2\cdot\left(\frac{144-49}{16}\right) + \frac{35}{4} = 6 + \frac{35}{4} - 2\cdot\frac{95}{16} = \frac{59}{4} - \frac{95}{8}$$

$$A = \frac{118 - 95}{8} = \frac{23}{8}\ u^2$$

**2.-** Determinar el dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes coordenados, asíntotas, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad (concavidad hacia arriba y hacia abajo) de la siguiente función
**[2'5 puntos]**




$$Dom\left(f\right) = \forall x \in \Re - \left\{0\ ,3\right\}$$

$$Rec\left(f\right) = \forall x \in \Re - \left\{-2\right\}$$

$$Puntos\ de\ corte \Rightarrow \begin{cases} Con\ OX \Rightarrow x = 3 \\ Con\ OY \Rightarrow \left(No\ existe\right) \nexists x \in \Re \end{cases}$$

$$Asíntota\ vertical \Rightarrow x = 3$$

$$Asíntota\ horizontal \Rightarrow \begin{cases} y = -2\ cuando\ x \to \infty \\ y = -2\ cuando\ x \to -\infty \end{cases}$$

$$Máximo\ relativo \Rightarrow x = -2 \Rightarrow No\ derivable$$

$$Mínimo\ relativo \Rightarrow x = 0 \Rightarrow Discontinuo \Rightarrow \begin{cases} x = 0^{+} \\ x = 0^{-} \end{cases}$$

$$No\ hay\ puntos\ de\ inf\ lexión$$

$$Crecimiento \Rightarrow \forall x \in \Re / \left(-4 < x < -2\right) \cup \left(0 < x < 3\right) \cup \left(x > 3\right)$$

$$Decrecimiento \Rightarrow \forall x \in \Re / \left(x < -4\right) \cup \left(-2 < x < 0\right) \cup \left(x > 3\right)$$

$$Concavidad \Rightarrow \forall x \in \Re / -4 < x < 3$$

$$Convexidad \Rightarrow \forall x \in \Re / \left(x < -4\right) \cup \left(x > 3\right)$$

**Ejercicio 3.-** Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro **k**: $\begin{cases} kx+ky-z=2 \\ 3x-ky=0 \\ 5x+ky=0 \\ x+2z=1 \end{cases}$

**[2’5 puntos]**

Para que haya posible compatibilidad el determinante de los coeficientes ampliado tiene que ser nulo ya que una de las ecuaciones tiene que ser combinación lineal de las otras dos

$$|A/B|=0 \Rightarrow |A/B|=\begin{vmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} k & k & -1 \\ 3 & -k & 0 \\ 5 & k & 0 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -k & 0 \\ 5 & k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-3k-5k-2\cdot(6k+10k)\Rightarrow$$

$$-8k-32k=0 \Rightarrow -40k=0 \Rightarrow k=0$$

$$Para\ todo\ valor\ de\ k \neq 0 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$$Cuando\ k=0$$

$$\begin{cases} -z=2 \\ 3x=0 \\ 5x=0 \\ x+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow x+2z=1 \Rightarrow 0+2\cdot(-2)\neq 1 \Rightarrow -4\neq 1 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

**Ejercicio 4.-**
a) Determinar si los puntos **A(-1 , 0 , 3)** , **B(2 , 4 , 1)** y **C(-4 , 3 , 1)** están alineados **[1 punto]**
b) Expresar de dos formas diferentes la ecuación de la recta que pasa por **A** y **B** **[1’5 puntos]**

a) Para saber si los puntos A, B y C están alineados los vectores AB y AC deben de ser iguales o proporcionales

$$a)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(2,4,1)-(-1,0,3)=(3,4,-2) \\ \overrightarrow{AC}=(-4,3,1)-(-1,0,3)=(3,3,-2) \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{3}\neq\frac{4}{3} \Rightarrow No\ están\ alineados$$

$$b)$$

$$Forma\ continua \Rightarrow r \equiv \frac{x+1}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-3}{-2} \qquad Forma\ paramétrica \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1+3\lambda \\ y=4\lambda \\ z=3-2\lambda \end{cases}$$